SIMULAZIONE DELLA PROVA D'ESAME DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I.

PROBLEMA 2

Considera le funzioni $f(x) = x + (1 + x)e^{-2x}$ e $g(x) = (1 + x)e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Verifica che f ha un solo asintoto e determina il suo punto d'intersezione con la funzione.
2. Disegna il grafico sommario di f; dimostra che ha un'unica intersezione con l'asse delle ascisse e determina, con tre iterazioni di un metodo iterativo a piacere, un valore approssimato.
3. Calcola le aree:
   - S_1 della regione piana situata nel semipiano $x \geq -1$ e delimitata da f e dal suo asintoto;
   - S_2 della regione piana situata nel semipiano $x \geq -1$ e delimitata da g e dall'asse x.
4. Determina la traslazione del piano nella quale la funzione g ha per immagine la funzione $g_1(x) = \dfrac{e^2 x}{e^{2x}}$.
5. Calcola il volume del solido generato dalla figura piana finita delimitata da g_1 e dalla retta $y = x$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

PROBLEMA 2

1. f è continua su $\mathbb{R}$ quindi non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x\to-\infty}(x+(1+x)\,e^{-2x})=-\infty-\infty\cdot e^{+\infty}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\left(1+\frac{1+x}{x}e^{-2x}\right)=1+1\cdot e^{+\infty}=+\infty.$$

Pertanto f non ha asintoto orizzontale né obliquo per $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1+x}{e^{2x}}\right)=+\infty+0=+\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\left(1+\frac{1+x}{x}\frac{1}{e^{2x}}\right)=1+0=1, \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{e^{2x}}\right)=0.$$

Quindi la retta $y=x$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$.
Troviamo l'intersezione fra la f e l'asintoto:

$$\begin{cases} y=x+(1+x)\,e^{-2x} \\ y=x \end{cases} \to x+(1+x)\,e^{-2x}=x, \quad (1+x)\,e^{-2x}=0\to x=-1\to A(-1;-1).$$

2. Dal comportamento per x tendente a $\pm\infty$ e dal teorema di esistenza degli zeri, deduciamo che f ha almeno un punto di intersezione con l'asse delle ascisse; per dimostrarne l'unicità studiamo la derivata prima: $f'(x)=1-(1+2x)\,e^{-2x}$.

$$f'(x)\geq 0\leftrightarrow 1-(1+2x)\,e^{-2x}\geq 0\to 1-\frac{1+2x}{e^{2x}}\geq 0\to\frac{e^{2x}-2x-1}{e^{2x}}\geq 0\to e^{2x}-2x-1\geq 0.$$

Per risolvere questa disequazione cerchiamo di capire l'andamento della funzione $u(x)=e^{2x}-2x-1$.

$u'(x)=2e^{2x}-2$ quindi:

$u'(x)<0$ per $x<0\to u(x)$ decrescente;

$u'(x)>0$ per $x>0\to u(x)$ crescente

$u'(x)=0$ per $x=0\to(0;0)$ min. rel. e ass.

Pertanto $f'(x)=u(x)e^{-2x}\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ e $f'(x)=u(x)e^{-2x}=0$ soltanto se $x=0$; quindi la f è monotòna crescente $\forall x\in\mathbb{R}$ e interseca una sola volta l'asse delle ascisse.
Completiamo lo studio di f con la derivata seconda.

$f''(x)=4xe^{-2x}\to$ per $x<0$ la concavità è rivolta verso il basso;
per $x>0$ la concavità è rivolta verso l'alto;
nel punto (0; 1) flesso orizzontale.

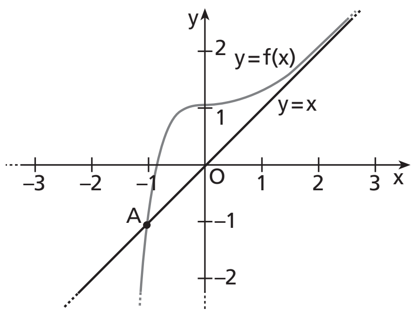


Figura 5.

Per determinare lo zero di f utilizziamo il metodo di bisezione. Nella tabella sono riportati i risultati di tre iterazioni a partire dall'intervallo $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$.

n	*a*	*b*	*f*(*a*)	*f*(*b*)	(*a* + *b*)/2	*f*[(*a* + *b*)/2]	errore
0	−1	−0,5	−1	0,859141	−0,75	0,370422	0,25
1	−1	−0,75	−1	0,370422	−0,875	−0,15567	0,125
2	−0,875	−0,75	−0,15567	0,370422	−0,8125	0,139704	0,0625
3	−0,875	−0,8125	−0,15567	0,139704	−0,84375	0,00093	0,03125

Pertanto $-0{,}84375$ è un valore approssimato dello zero di f con un'approssimazione di 0,03125.

3. L'area S_1, evidenziata nel grafico, si calcola con il seguente integrale improprio:

$$S_1 = \int_{-1}^{+\infty} (f(x) - x)\, dx = \int_{-1}^{+\infty} (x + (1+x)e^{-2x} - x)\, dx = \int_{-1}^{+\infty} (1+x)e^{-2x}\, dx = \int_{-1}^{+\infty} g(x)\, dx = S_2.$$

Osserviamo dunque che le aree S_1 e S_2 sono uguali.

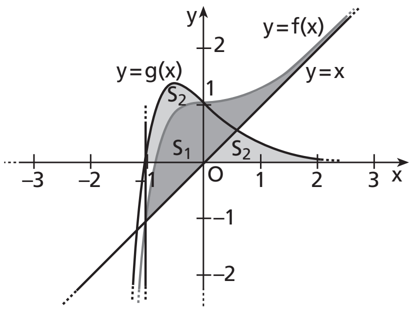


Figura 6.

$$\int_{-1}^{+\infty} (1+x)\, e^{-2x}\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{k} (1+x)e^{-2x}\, dx = \lim_{k\to+\infty} \left\{ \left[-\frac{1+x}{2} e^{-2x} \right]_{-1}^{k} - \left(-\frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{k} e^{-2x}\, dx \right\} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left\{ \left[-\frac{1+k}{2} e^{-2k} - 0 \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{-1}^{k} \right\} = \lim_{k\to+\infty} \left\{ -\frac{1+k}{2} e^{-2k} - \frac{1}{4} [e^{-2k} - e^2] \right\} = \frac{e^2}{4}.$$

4. Considerata la generica traslazione del piano

$\tau : (x;\, y) \quad \rightarrow \quad (x';\, y') = (x + a;\, y + b),$

si tratta di determinare a e b. A questo scopo applichiamo la trasformazione all'espressione $y = g(x)$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ y = (1+x)\, e^{-2x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \\ y' - b = (1 + (x' - a))\, e^{-2(x'-a)} \end{cases}, \begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ y' = (1 + x' - a)\, e^{-2(x'-a)} + b \end{cases}.$$

La terza espressione deve coincidere, $\forall x \in \mathbb{R}$, con g_1. Riscriviamo nella seguente forma g_1:

$$y' = g_1(x') = e^2 \frac{x'}{e^{2x'}} = x' e^{-2(x'-1)}.$$

Le due espressioni di y' coincidono soltanto se:

$(1 + x' - a)\, e^{-2(x'-a)} + b = x'\, e^{-2(x'-1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi soltanto se

$$\begin{cases} 1 + x' - a = x' \\ x' - a = x' - 1 \\ b = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

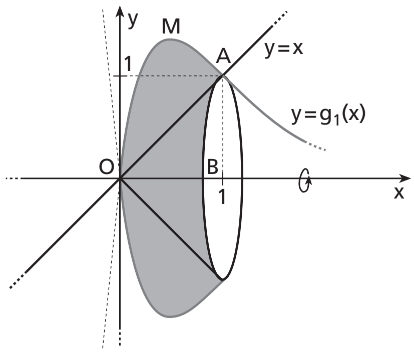
5. Utilizzando i limiti all'infinito e le derivate prima e seconda disegniamo il grafico sommario di g_1 mettendo in evidenza le intersezioni con la retta $y = x$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-2(x-1)} = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-2(x-1)} = 0;$

$g_1'(x) = (1 - 2x)\, e^{-2(x-1)}, \quad g_1''(x) = 4(x-1)\, e^{-2(x-1)};$

$x e^{-2(x-1)} = x \quad \rightarrow \quad O(0; 0),\ A(1; 1).$

Il volume richiesto V si ottiene sottraendo al solido generato dalla rotazione dell'arco di curva $O\overset{\frown}{M}A$ il cono di vertice O e apotema $\overline{OA}$.



◀ **Figura 7.**

$$V_{OMA} = \int_0^1 \pi [g_1(x)]^2\, dx = \pi \int_0^1 x^2 e^{-4(x-1)}\, dx = \pi \left\{ \left[-\frac{x^2 e^{-4(x-1)}}{4} \right]_0^1 - \left(-\frac{1}{4} \right) \int_0^1 2x e^{-4(x-1)}\, dx \right\} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \left\{ \left[-\frac{x e^{-4(x-1)}}{4} \right]_0^1 - \left(-\frac{1}{4} \right) \int_0^1 e^{-4(x-1)}\, dx \right\} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \left[-\frac{e^{-4(x-1)}}{4} \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{32}(1 - e^4) = \pi \frac{e^4 - 13}{32}.$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \pi\, \overline{BA}^2 \cdot \overline{OB} = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 1^2 = \frac{1}{3} \pi.$$

$$V = V_{OMA} - V_{cono} = \pi \frac{e^4 - 13}{32} - \frac{1}{3} \pi = \pi \frac{e^4}{32} - \pi \frac{71}{96}.$$