

■ **PROBLEMA 2**

Sia  $f$  la funzione così definita:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$$

con  $a$  e  $b$  numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti  $a$  e  $b$ , esiste sempre un valore di  $x$  tale che

$$f(x) = \frac{a+b}{2}$$

2. Si consideri la funzione  $g$  ottenuta dalla  $f$  ponendo  $a = 2b = 2$ . Si studi  $g$  e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per  $x > 0$  il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

■ **PROBLEMA 2**

1. Una funzione  $f$ , continua in  $[a, b]$ , con  $f(a) \neq f(b)$ , assume, almeno una volta, nell'interno di tale intervallo, un qualsiasi valore compreso fra  $f(a)$  e  $f(b)$ . (Teorema dei valori intermedi, o di Darboux)

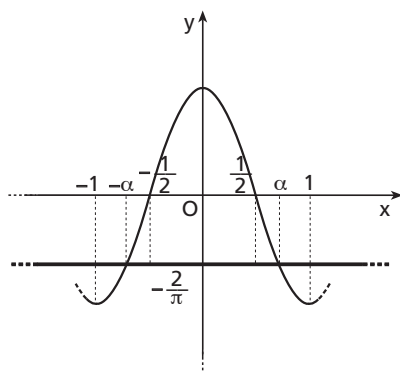
La funzione  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$  è continua su tutto  $\mathbb{R}$ , in particolare nell'intervallo chiuso limitato  $[a, b]$ . In tale intervallo la funzione assume ogni valore compreso tra  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$ , in particolare il valore  $\frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{a + b}{2}$ .

2. Ponendo  $a = 2b = 2$  si ottiene  $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x = \frac{1}{2}\sin(\pi x) + x$ .

$g(-x) = -g(x)$ , la funzione è dispari, quindi simmetrica rispetto all'origine degli assi.  $g(0) = 0$ , il grafico passa per l'origine.

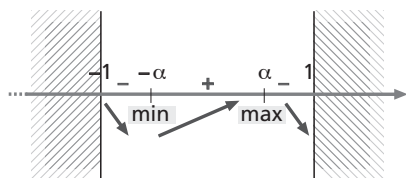
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

$g'(x) = \frac{1}{2}\pi\cos(\pi x) + 1 > 0$ , se  $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi}$ . La rappresentazione grafica di  $g'(x)$  (figura 8) mostra che  $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\alpha + 2k < x < \alpha + 2k$ , con  $\alpha = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right)$  e  $k \in \mathbb{Z}$ .



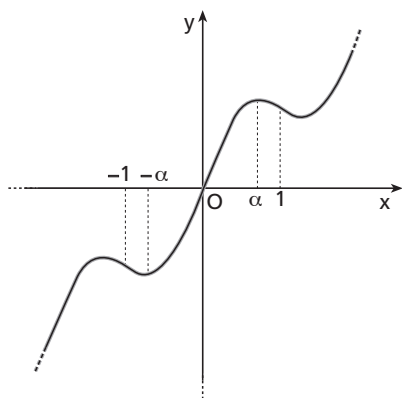
◀ **Figura 8.**

Si hanno quindi punti di minimo relativo per  $x = -\frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$  e punti di massimo relativo per  $x = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$  (vedi figura 9).



◀ **Figura 9.**

$g''(x) = -\frac{\pi^2}{2} \sin(\pi x) > 0$ , se  $\sin(\pi x) < 0$ , tale condizione è verificata per  $1 + 2k < x < 2 + 2k$ . Si hanno punti di flesso per  $x = 1 + 2k$  e  $x = 2 + 2k$ . Il grafico di  $g$  è rappresentato in figura 10.



◀ Figura 10.

3. Al punto precedente si è ottenuto:  $g'(\alpha) = \frac{\pi \cdot \cos \pi}{2} + 1 = 0$ .

Considerando che:  $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$  e

$g'(1) = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0$ , segue che  $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ .

Si applica il metodo di bisezione a  $g'(x)$ , ottenendo:

$c$	$f(c)$	$\alpha$
$0,75 = (0,5 + 1)/2$	$-0,11 < 0$	$0,5 < \alpha < 0,75$
$0,625 = (0,5 + 0,75)/2$	$-0,40 > 0$	$0,625 < \alpha < 0,75$
$0,6875 = (0,625 + 0,75)/2$	$-0,13 > 0$	$0,6875 < \alpha < 0,75$
$0,71875 = (0,6875 + 0,75)/2$	...	...

Si arriva infine al valore  $\alpha \cong 0,72$ .