10 Si stabilisca per quali valori $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0; 3]$. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

10 Consideriamo l'equazione $x^2(3-x)=k$ e poniamo entrambi i membri uguali a y; otteniamo il seguente sistema parametrico:

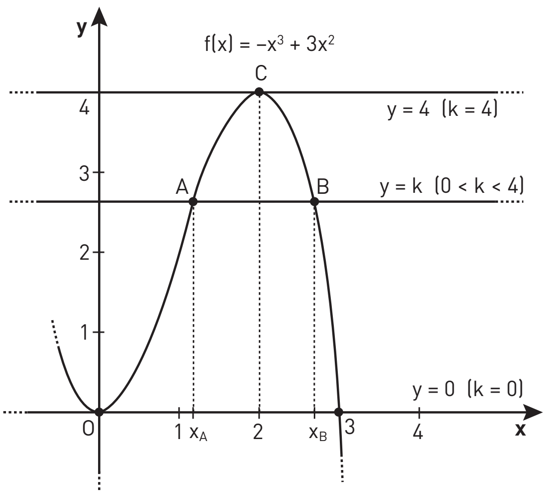
$$\begin{cases} y=-x^3+3x^2 \\ y=k \end{cases}.$$

Si tratta di studiare nel piano cartesiano le intersezioni del grafico della funzione razionale intera $f(x)=-x^3+3x^2$ col fascio improprio di rette $y=k$.

Tale funzione:

- ha dominio reale;
- poiché $f(-x)\neq \pm f(x)$, essa non è né pari né dispari;
- si annulla per $x=0$ e $x=3$;
- è positiva per $x<3$ e negativa per $x>3$;
- non ha asintoti;
- ha derivata prima $f'(x)=-3x^2+6x$, positiva per $0<x<2$, negativa per $x<0 \vee x>2$, nulla per $x=0 \vee x=2$; il grafico di f è così dotato di minimo nel punto $O(0; 0)$ e di massimo nel punto $C(2; 4)$.

Rappresentiamo in figura 7 il grafico della funzione $f(x)$ e studiamo le sue intersezioni nell'intervallo $0\leq x\leq 3$ con le rette del fascio improprio $y=k$.



▲ **Figura 7.**

Dalla figura si osserva che l'equazione $x^2(3-x)=k$ ha:

- per $k=0$, tre soluzioni di cui due coincidenti e una distinta;
- per $0<k<4$, due soluzioni distinte, $x_A<x_B$;
- per $k=4$, due soluzioni coincidenti.

Quindi l'equazione $x^2(3-x)=k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo [0; 3] per $0\leq k<4$.

Posto $k=3$, si deduce dal grafico che la soluzione maggiore x_B appartiene all'intervallo [2; 3] ed è l'unica soluzione in tale intervallo dell'equazione $-x^3+3x^2=3$.
Posto $g(x)=-x^3+3x^2-3$, x_B è anche l'unico zero di $g(x)$ per $2<x<3$. Determiniamo un valore approssimato di tale zero col metodo di bisezione compilando la seguente tabella.

n	a_n	b_n	$g(a_n)$	$g(b_n)$	$m_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	$g(m_n)$	$\epsilon_n=\frac{b_n-a_n}{2}$
1	2	3	1	-3	2,5	0,125	0,5
2	2,5	3	0,125	-3	2,75	$-1{,}109375$	0,25
3	2,5	2,75	0,125	$-1{,}109375$	2,625	$-0{,}416016$	0,125
4	2,5	2,625	0,125	$-0{,}416016$	2,5625	$-0{,}127197$	0,0625
5	2,5	2,5625	0,125	$-0{,}127197$	2,53125	0,003387	0,03125
6	2,53125	2,5625	0,003387	$-0{,}127197$	2,546875	$-0{,}060772$	0,015625
7	2,53125	2,546875	0,003387	$-0{,}060772$	2,539063	$-0{,}028410$	0,007813

Osservando la colonna dei valori medi, il valore approssimato con due cifre decimali della soluzione x_B è 2,53.