

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2011**

■ **PROBLEMA 2**

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x.$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnano i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy . Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R .
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua.
Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y , la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2011

PROBLEMA 2

1. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 - 16x$: ha dominio nel campo reale; $f(-x) = -x^3 + 16x = -f(x)$, pertanto il corrispondente grafico è simmetrico rispetto all'origine del sistema cartesiano; le intersezioni con gli assi sono $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(-4; 0)$. Valutiamo il segno della funzione ponendo $x(x^2 - 16) > 0$:

$$x > 0, \\ x^2 - 16 > 0 \rightarrow x < -4 \vee x > 4.$$

► Figura 4.

		-4		0		4	
	...	—————→					
x	-		-		+		+
$x^2 - 16$	+		0		-		+
f(x)	-		0		+		0
		-	0	+	0	-	0

Dal quadro del segno (figura 4) si deduce:

$$f(x) > 0 \quad \text{per } -4 < x < 0 \vee x > 4, \\ f(x) < 0 \quad \text{per } x < -4 \vee 0 < x < 4.$$

Valutiamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali poiché la funzione non ha punti di discontinuità; inoltre risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 16x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 16x}{x} = +\infty,$$

pertanto la funzione non ha asintoti orizzontali, né obliqui.

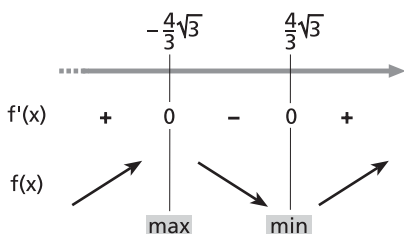
Studiamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x) = 3x^2 - 16,$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 3x^2 - 16 > 0 \rightarrow x < -\frac{4\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow 3x^2 - 16 < 0 \rightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3} < x < \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



◀ Figura 5.

Dal quadro del segno della derivata prima (figura 5) si ricava che la funzione ha un massimo per

$x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e un minimo per $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Le corrispondenti ordinate valgono:

$$f\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{64\sqrt{3}}{9} + \frac{192\sqrt{3}}{3} = \frac{128\sqrt{3}}{9}, \quad f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{128\sqrt{3}}{9},$$

gli estremi relativi della funzione sono quindi:

$$M_1\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{128\sqrt{3}}{9}\right), \quad M_2\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; -\frac{128\sqrt{3}}{9}\right).$$

Calcoliamo infine la derivata seconda:

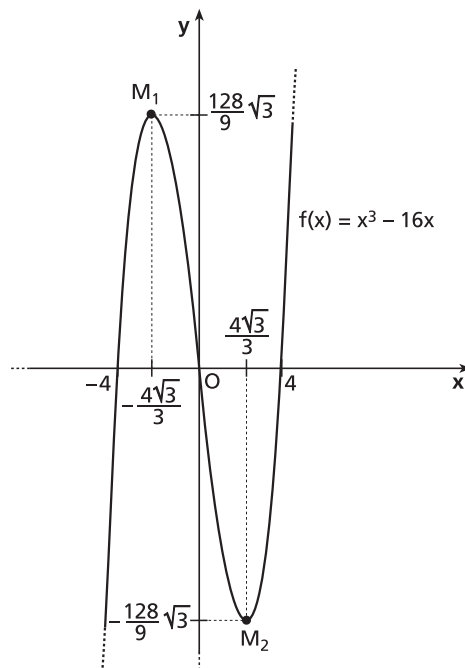
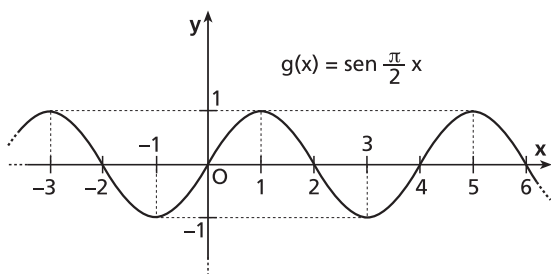
$$f''(x) = 6x.$$

Essa si annulla per $x=0$, è positiva per $x>0$, negativa per $x<0$: la funzione ha un flesso per $x=0$, ha concavità verso l'alto per $x>0$, verso il basso per $x<0$.

Nella figura 6 è riportato il grafico di $f(x) = x^3 - 16x$.

Consideriamo la funzione $g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$: il suo grafico si ottiene dalla funzione $y = \sin x$ tramite una contrazione orizzontale $x' = \frac{x}{\frac{\pi}{2}}$; poiché il periodo della funzione

$y = \sin x$ è 2π , il periodo di $g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ è $T=4$. Rappresentiamo in figura 7 il suo grafico.



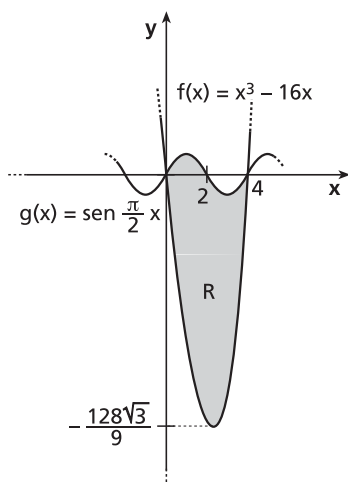
▲ Figura 6.

◀ Figura 7.

Ricaviamo ora i punti del grafico di g a tangente orizzontale nell'intervallo $[-10; 10]$, deducendoli dal grafico di figura 7 e tenendo conto della periodicità $T=4$ della funzione:

$$\begin{cases} x_k = 2k + 1 \\ y_k = (-1)^k \end{cases} \quad \text{con } -5 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Rappresentiamo nello stesso sistema cartesiano i grafici delle funzioni f e g e indichiamo con R la regione delimitata nell'intervallo $[0; 4]$ (figura 8).

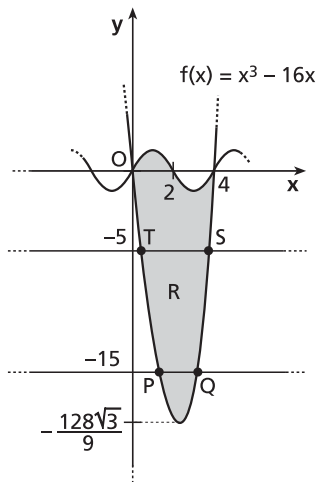


◀ Figura 8.

Calcoliamo la superficie S della regione R mediante l'integrale:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^4 [g(x) - f(x)] dx = \\
 &= \int_0^4 \left(\sin \frac{\pi}{2} x - x^3 + 16x \right) dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{x^4}{4} + 8x^2 \right]_0^4 = -\frac{2}{\pi} - 64 + 128 + \frac{2}{\pi} = 64.
 \end{aligned}$$

3. Tracciamo le rette $y = -15$ e $y = -5$ che intersecano il contorno della regione R nei punti P, Q, S, T (figura 9).



◀ Figura 9.

Determiniamo le ascisse dei punti P e Q , risolvendo il seguente sistema per $0 < x < 4$:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -15 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x^3 - 16x + 15 = 0 \\ y = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x - 15) = 0 \\ y = -15 \end{cases} \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{61}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{61}}{2}\right) = 0 \\ y = -15 \end{cases} \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -15 \end{cases} \vee \begin{cases} x - \frac{-1 - \sqrt{61}}{2} \text{ non accettabile} \\ y = -15 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{61}}{2} \\ y = -15 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pertanto risulta:

$$x_P = 1, \quad x_Q = \frac{-1 + \sqrt{61}}{2}.$$

Le ascisse dei punti S e T , con $0 < x < 4$ soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 16x + 5 = 0 \\ y = -5 \end{cases}$$

L'equazione $x^3 - 16x + 5 = 0$ non ha soluzioni razionali, pertanto procediamo con l'analisi numerica secondo un'approssimazione a meno di 10^{-1} , deducendo dal grafico che esistono due radici x_T e x_S .

Posto $p(x) = x^3 - 16x + 5$, osserviamo che $p(0) = 5$ e $p(1) = -10$, segue che $0 < x_T < 1$; applichiamo il metodo di bisezione, partendo dai valori $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$.

a	$p(a)$	b	$p(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$p\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	5	1	-10	0,5	-2,875
0	5	0,5	-2,875	0,25	1,016
0,25	1,016	0,5	-2,875	0,375	0,947
0,25	1,016	0,375	-0,947	0,3125	0,031

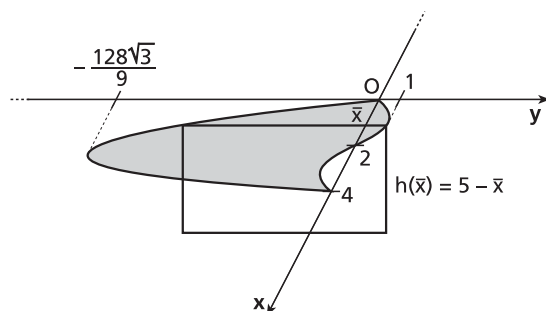
Si trova quindi che $x_T = 0,3$ a meno di 10^{-1} .

Ricerchiamo ora il valore approssimato di x_s , osservando che $p(3) = -16$ e $p(4) = 5$, segue che $3 < x_s < 4$; riapplichiamo il metodo di bisezione, partendo dai valori $a_0 = 3$ e $b_0 = 4$.

a	$p(a)$	b	$p(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$p\left(\frac{a+b}{2}\right)$
3	-16	4	5	3,5	-8,125
3,5	-8,125	4	5	3,75	-2,266
3,75	-2,266	4	5	3,875	1,186
3,75	-2,266	3,875	1,186	3,813	-0,571

Dalla tabella ricaviamo così che un valore approssimato della radice è $x_s = 3,8$ con un errore minore di 0,1.

4. Calcoliamo il volume della piscina sezionando il solido con piani $x = \bar{x}$, $0 \leq \bar{x} \leq 4$ perpendicolari alla superficie dell'acqua (figura 10).



◀ Figura 10.

Per ogni piano si ottiene un rettangolo di altezza $h(\bar{x}) = 5 - \bar{x}$ e base $g(\bar{x}) - f(\bar{x})$; l'area di tale rettangolo vale:

$$(g(\bar{x}) - f(\bar{x})) \cdot h(\bar{x}) = \left(\sin \frac{\pi}{2} \bar{x} - \bar{x}^3 + 16\bar{x} \right) \cdot (5 - \bar{x}).$$

Il volume V della vasca può essere così calcolato mediante l'integrale:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \left[\sin \frac{\pi}{2} \bar{x} - \bar{x}^3 + 16\bar{x} \right] (5 - \bar{x}) d\bar{x} = 5 \int_0^4 \sin \frac{\pi}{2} \bar{x} d\bar{x} - \int_0^4 \bar{x} \sin \frac{\pi}{2} \bar{x} d\bar{x} + \int_0^4 [-\bar{x}^3 + 16\bar{x}] (5 - \bar{x}) d\bar{x} = \\ &= 5 \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \bar{x} \right]_0^4 - \int_0^4 \bar{x} \sin \frac{\pi}{2} \bar{x} d\bar{x} + \int_0^4 (\bar{x}^4 - 5\bar{x}^3 - 16\bar{x}^2 + 80\bar{x}) d\bar{x} = \\ &= 5(-1 + 1) - \int_0^4 \bar{x} \sin \frac{\pi}{2} \bar{x} d\bar{x} + \left[\frac{\bar{x}^5}{5} - \frac{5\bar{x}^4}{4} - \frac{16\bar{x}^3}{3} + 40\bar{x}^2 \right]_0^4 = \end{aligned}$$

svolgiamo per parti l'integrale contenuto ancora nell'espressione:

$$\begin{aligned}
 &= - \left[-\frac{2\bar{x}}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \bar{x} \right]_0^4 - \int_0^4 \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \bar{x} d\bar{x} + \left[\frac{4^5}{5} - \frac{5 \cdot 4^4}{4} - \frac{16 \cdot 4^3}{3} + 40 \cdot 4^2 \right] = \\
 &= \frac{8}{\pi} - \left[\frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} \bar{x} \right]_0^4 + \left(\frac{1024}{5} - 320 - \frac{1024}{3} + 640 \right) = \frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15}.
 \end{aligned}$$

In unità di misura, tenendo conto che 1 dm³ equivale a 1 L:

$$V = \left(\frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15} \right) m^3 = \left(\frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15} \right) \cdot 10^3 \text{ L} \approx 16013,15 \text{ L}.$$