ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001
Sessione ordinaria

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la funzione:

$y = x^2 + a\ln(x + b)$, con a e b diversi da zero.

a) Si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$.

b) Si studi e si disegni Γ.

c) Si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x.

d) Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;

e) Si disegni, per i valori di a e b trovati il grafico di $y = \left| x^2 + a\ln(x + b) \right|$.

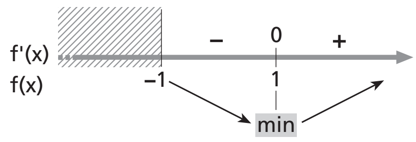
PROBLEMA 2

a) Il C.E. della funzione è $x > -b$. Per il passaggio dall'origine risulta $a \ln b = 0$ e, poiché $a \neq 0$ per ipotesi, si deduce che $\ln b = 0$ da cui $b = 1$ e quindi $x > -1$.

Considerato $y = x^2 + a\ln(x+1)$, la condizione necessaria per avere un estremante nel punto $x = 1$ richiede che $y'(1) = 0$. Dato che $y'(x) = 2x + \dfrac{a}{x+1}$, $y'(1) = 2 + \dfrac{a}{2} = 0 \rightarrow a = -4$. La funzione ha forma $y = x^2 - 4\ln(x+1)$.

Ora bisogna verificare se $x = 1$ è un punto di minimo assoluto.

La derivata prima $y'(x) = 2x - \dfrac{4}{x+1} = 2\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$ ha denominatore sempre positivo, pertanto essa è complessivamente positiva se $x^2 + x - 2 > 0 \rightarrow x < -2 \vee x > 1$. Tenendo conto della condizione di esistenza, si riporta nella figura 5 il quadro della monotonia di f.



▲ **Figura 5.**

Si ricava che la funzione ha un minimo assoluto in $x = 1$.

b) Data $f(x) = x^2 - 4\ln(x+1)$, per le precedenti considerazioni, essa ha C.E.: $x > -1$, minimo assoluto $M(1;\, 1 - 4\ln 2)$ e interseca l'asse y nell'origine del sistema. Non è possibile determinare in modo esatto i punti di intersezione con l'asse x perché l'equazione $x^2 - 4\ln(x+1) = 0$ non è risolvibile algebricamente e si rimanda al punto c per il calcolo numerico. Si osserva comunque che $f(2) = 4 - 4\ln 3 < 0$ e $f(3) = 9 - 4\ln 4 > 0$ e, quindi, c'è un'intersezione positiva compresa tra 2 e 3.

I limiti agli estremi del campo di esistenza valgono:

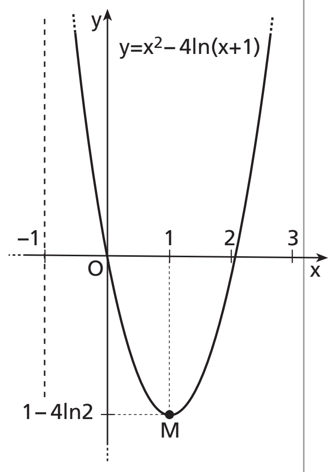
$$\lim_{x \to -1^+} (x^2 - 4\ln(x+1)) = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4\ln(x+1)) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - 4\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right) = \text{(De L'Hospital)} = +\infty.$$

La funzione ha asintoto verticale $x = -1$ e non ha asintoti orizzontali. Inoltre, poiché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 4\ln(x+1))}{x} = +\infty,$$ la funzione non ha asintoti obliqui.

La derivata seconda $y''(x) = 2 + \dfrac{4}{(x+1)^2}$ è sempre positiva, pertanto la curva ha sempre concavità verso l'alto. La figura 6 rappresenta il grafico di Γ.



▲ **Figura 6.**

c) Consideriamo l'intervallo [2; 3]: poiché $f(2) < 0$ e $f(3) > 0$, esiste solo uno zero in tale intervallo essendo in esso la derivata prima non nulla. Si valuta lo zero attraverso il metodo di bisezione. La tabella di iterazione è la seguente:

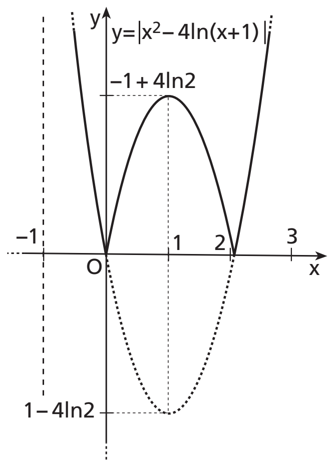
n	a_n	b_n	m_n	ε_n
0	2	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{17}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{35}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{17}{8}$	$\frac{35}{16}$	$\frac{69}{32}$	$\frac{1}{32}$
5	$\frac{17}{8}$	$\frac{69}{32}$	$\frac{137}{64}$	$\frac{1}{64}$

Il valore approssimato dell'intersezione è $x = \frac{137}{64} \simeq 2{,}14$ con un errore inferiore a $\frac{1}{64}$ cioè a 0,015625.

d) Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$.
L'asse di simmetria è $y = y(1)$ cioè la retta parallela all'asse delle y, $y = 1 - 4\ln 2$. Le equazioni della simmetria sono $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - 8\ln 2 - y \end{cases}$.
La curva trasformata risulta di equazione:

$$y = 4\ln\frac{x+1}{4} - x^2 + 2.$$

e) Il grafico di $y = \left| x^2 - 4\ln(x+1) \right|$ coincide con quello di $f(x) = x^2 - 4\ln(x+1)$ per quei valori di x in cui la funzione f è positiva o nulla, mentre, per i restanti valori, si traccia la simmetrica rispetto all'asse delle x. (figura 7).



▲ **Figura 7.**