9 Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

9 Consideriamo la funzione:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6.$$

Cercare le soluzioni reali dell'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ equivale a cercare le intersezioni della funzione f con l'asse delle x.
Poiché la funzione è continua in $\mathbb{R}$ ed esistono due valori di x in cui la funzione cambia di segno, ovvero $x_1 = 0$, $f(0) = 6$ e $x_2 = -1$, $f(-1) = -5$, per il teorema di esistenza degli zeri possiamo concludere che esiste almeno un punto C, interno all'intervallo $[-1, 0]$, in cui la funzione si annulla.
Calcoliamo la derivata prima di $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$, ottenendo

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 = 6(x^2 - x + 1).$$

Osserviamo che $x^2 - x + 1 > 0$ per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione è strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Si conclude che esiste una sola radice dell'equazione di partenza ed è localizzata nell'intervallo $[-1; 0]$.
Per calcolare tali radici utilizziamo il metodo delle secanti, tenendo conto che, nell'intervallo $[-1; 0]$ la derivata seconda vale $f''(x) = 12x - 6$ ed è qui negativa, come $f(-1)$. Vale pertanto la formula ricorsiva:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{-1 - x_n}{-5 - f(x_n)} \cdot f(x_n) \end{cases}$$

Osserviamo che a partire da x_4 comincia a essere stabile la cifra dei centesimi. Pertanto il valore della radice con una precisione di due cifre significative è $-0{,}67$.

n	x_n
0	0
1	− 0,54545
2	− 0,65089
3	− 0,66891
4	− 0,67190
5	− 0,67240
6	− 0,67248