ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo, o nullo).

2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta di equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.

3. Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di D.

4. La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W.

PROBLEMA 2

1. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 + kx$ al variare di k parametro reale.

- Dominio: $\mathbb{R}$, per ogni k reale.
- Simmetrie: $f(x) = -f(x)$, ossia la funzione è dispari, per ogni k reale e il grafico è simmetrico rispetto all'origine di riferimento.
- Intersezione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x=0 \\ y = x^3 + kx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

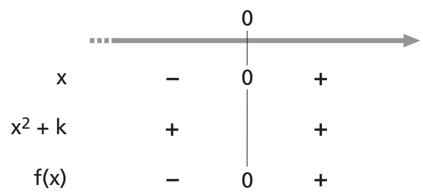
$$\begin{cases} y=0 \\ y = x^3 + kx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0 = x^3 + kx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x(x^2+k)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x^2+k=0 \end{cases}$$

Osservando i sistemi risolutivi si deduce che se $k \geq 0$ non ci sono altre intersezioni con l'asse x oltre all'origine.
Se $k < 0$ vi sono altre due intersezioni con l'asse delle ascisse oltre all'origine: $(-\sqrt{-k}; 0)$ e $(\sqrt{-k}; 0)$.

- Segno della funzione:

$$f(x) > 0 \rightarrow x(x^2 + k) > 0.$$

Se $k \geq 0$, il segno di f è rappresentato nella figura 7.
Pertanto $f(x) > 0$ per $x > 0$.
Se $k < 0$, ci sono due ulteriori radici della funzione e il segno di f varia come illustrato dal diagramma di figura 8.

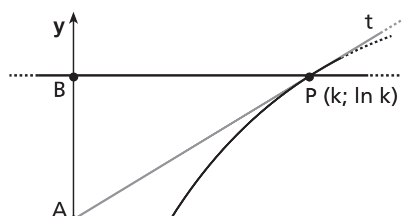


▲ **Figura 7.**

- Calcolo e segno delle derivate prima e seconda:

$$f'(x) = 3x^2 + k;$$
$$f''(x) = 6x.$$

Osserviamo che $f''(x)$ è indipendente da k.
Al variare del segno del parametro k, si possono individuare 3 casi:



▲ **Figura 8.**

a) Se $k > 0$:
$f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e la funzione è strettamente crescente;
$f''(x) > 0$ per $x > 0$, $f''(x) = 0$ per $x = 0$ (il punto (0;0) è un flesso a tangente non orizzontale).
Nella figura 9a è rappresentato un grafico di $f(x)$ quando $k > 0$.

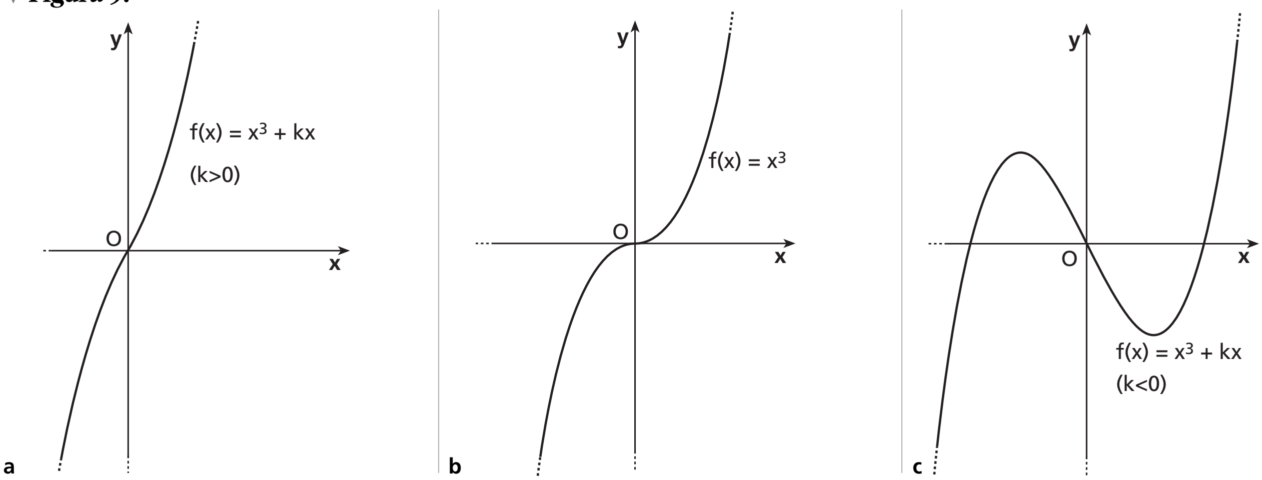
b) Se $k = 0$:
$f'(x) > 0$ $\forall x \neq 0$ e la funzione è strettamente crescente;
$f'(x) = 0$ per $x = 0$;
$f''(x) > 0$ per $x > 0$, $f''(x) = 0$ per $x = 0$ (il punto (0; 0) è un flesso a tangente orizzontale). Nella figura 9b è illustrato il grafico di $f(x)$ quando $k = 0$ ovvero $y = x^3$.

c) Se $k < 0$:
$f'(x) > 0 \rightarrow 3x^2 + k > 0 \rightarrow x < -\sqrt{-\frac{k}{3}} \vee x > \sqrt{-\frac{k}{3}}$.

Il punto $\left(-\sqrt{-\frac{k}{3}}; -\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$ è un punto di massimo relativo, mentre $\left(\sqrt{-\frac{k}{3}}; \frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$

e un punto di minimo relativo; $f''(x) > 0$ per $x > 0$; $f''(x) = 0$ per $x = 0$ (il punto (0;0) è un flesso a tangente non orizzontale). Nella figura 9c è rappresentato il grafico di $f(x)$ quando $k < 0$.

▼ **Figura 9.**

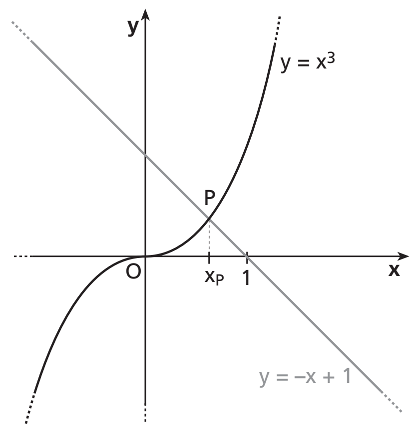


2. Rappresentiamo in figura 10 il grafico γ della funzione $g(x) = x^3$ e la retta di equazione $y = 1 - x$.

I punti di intersezione tra γ e la retta corrispondono alle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

ovvero all'equazione risolvente $x^3 + x - 1 = 0$.



▶ **Figura 10.**

Sia $h(x) = x^3 + x - 1$. La funzione h è polinomiale di grado dispari, ed è strettamente crescente, poiché la sua derivata prima $h'(x) = 3x^2 + 1$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione si annulla in un unico punto x_P.

Osservando che $h(0) = -1$ e $h(1) = 1$, ne segue che $x_P \in]0, 1[$. Per determinare il valore di x_P a meno di 0,1 utilizziamo il metodo di bisezione, partendo dai valori $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$.

a	$h(a)$	b	$h(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$h\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	− 1	1	1	0,5	− 0,375
0,5	− 0,375	1	1	0,75	0,1719
0,5	− 0,375	0,75	0,1719	0,63	− 0,1309
0,63	− 0,1309	0,75	0,1719	0,69	0,0125

Si trova quindi che $x_P = 0,69$ con un errore minore di 0,1.

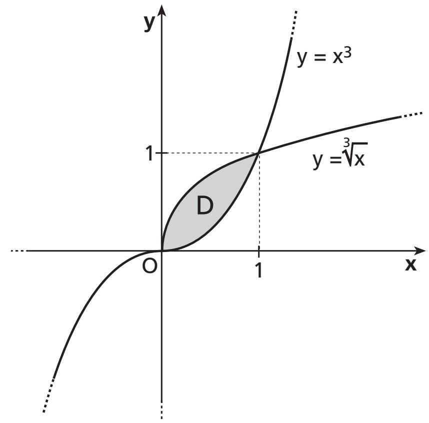
3. La funzione inversa di g ha equazione $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
Nella figura 11 sono riportati i grafici delle due funzioni.

Le intersezioni dei grafici di g e g^{-1} nel primo quadrante sono date dalle soluzioni del sistema per $x > 0$:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt[3]{x} \end{cases} \to x^3 = \sqrt[3]{x} \to x^6 = 1 \to x = 1$$

Osserviamo inoltre che vale la disuguaglianza $x^3 < \sqrt[3]{x}$, per $x \in]0; 1[$.
L'area A della regione D è data da:

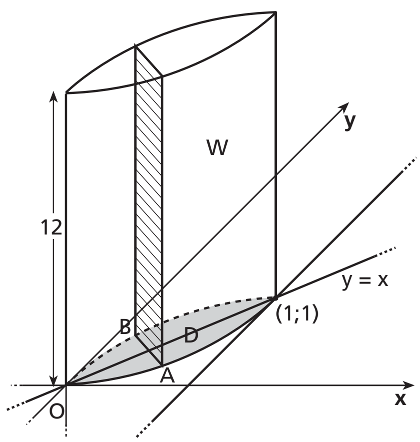
$$A(D) = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3)dx = \left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



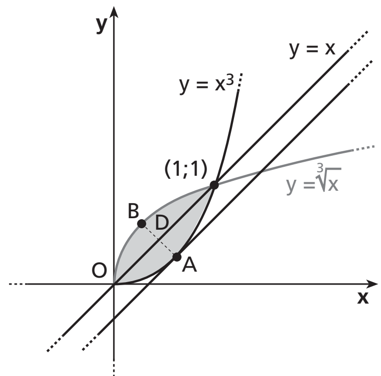
▲ **Figura 11.**

4. Il solido W è un «cilindro» di base D (figura 12).

Tra le sezioni rettangolari considerate, quella di area massima è quella di base massima. Tale base è il segmento AB che ha come estremi i punti delle curve che hanno ascissa compresa tra 0 e 1 e distanza massima dalla bisettrice del primo e terzo quadrante (figura 13).



▲ **Figura 12.**



▲ **Figura 13.**

Il punto A è il punto del grafico di $g(x)$ tale che la tangente in A è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, con $0 < x_A < 1$.
Poiché $g'(x) = 3x^2$, risulta:

$$3x_A^2 = 1 \to x_A = \frac{\sqrt{3}}{3},\ y_A = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Per simmetria risulta $B\left(\frac{\sqrt{3}}{9}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Perciò il segmento AB ha misura $\overline{AB} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ e l'area della sezione massima risulta:

$$\overline{AB} \cdot altezza = \frac{2\sqrt{6}}{9} \cdot 12 = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

Il volume V del solido W si ottiene moltiplicando l'area della regione D per l'altezza di 12:

$$V(W) = A(D) \cdot altezza = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$