ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 2

I raggi $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ metro tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.
Si chiede di determinare:

a) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';

b) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';

c) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

PROBLEMA 2

a) Considerato il cerchio di centro O e raggio pari a 1 m, lo si tagli in due settori circolari con angoli rispettivamente x e $2\pi - x$ (figura 3a). Unendo fra loro i segmenti OA e OB si ricavano due coni di apotema uguale a 1 m e circonferenza di base pari all'arco $\overset{\frown}{AOB}$ del corrispondente settore circolare ottenuto dal cerchio di partenza (figura 3b).

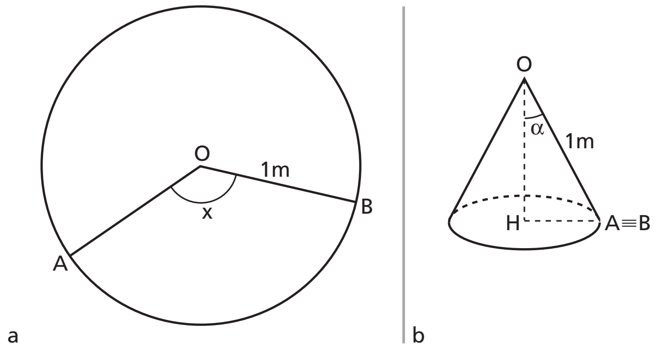

Figura 3.

Il volume V del cono C (figura 3b), corrispondente al settore circolare di ampiezza x, è $V = \frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2 \cdot \overline{OH}$.

Ora, $\overline{AH}$ è il raggio della circonferenza la cui lunghezza è pari all'arco $\overset{\frown}{AOB}$. Poiché un arco di una circonferenza è dato dal prodotto del raggio per l'angolo corrispondente espresso in radianti, si ha $\overset{\frown}{AOB} = 1 \cdot x = x$; pertanto $\overline{AH} = \frac{\overset{\frown}{AOB}}{2\pi} \rightarrow \overline{AH} = \frac{x}{2\pi}$. Applicando il teorema di Pitagora si trova $\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2}$ ovvero $OH = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

Il volume del cono C risulta quindi:

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{x^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}. \qquad (1)$$

Si studiano gli estremanti della funzione $V(x) = \frac{x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ per $x \in [0; 2\pi]$, considerando il segno della derivata prima. Poiché $V' = \frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$ e tenendo conto dell'intervallo di definizione di x, la derivata è positiva per $0 < x < \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$, nulla per $x = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ e negativa per $\sqrt{\frac{8}{3}}\pi < x < 2\pi$.

Quindi il volume del cono C è massimo per il settore circolare di ampiezza $x = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$.

L'arco corrispondente ha lunghezza $\overset{\frown}{AOB} = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ m; il rapporto percentuale con il cerchio vale:

$$\frac{\sqrt{\frac{8}{3}}\pi}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 81{,}6\,\%.$$

Il volume massimo del cono C risulta: $V_{max} = \dfrac{\frac{8}{3}\pi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi\ \text{m}^3$.

Si calcola ora il volume del cono C' dalla formula (1), assegnando a x il valore $2\pi - \sqrt{\dfrac{8}{3}}\,\pi$.

$$V' = \frac{\left(2\pi - \sqrt{\frac{8}{3}}\,\pi\right)^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \left(2\pi - \sqrt{\frac{8}{3}}\,\pi\right)^2}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{6}}{18}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{6}-2}{3}} = \frac{5-2\sqrt{6}}{9}\sqrt{\frac{2\sqrt{6}-2}{3}}\,\pi\ \text{m}^3.$$

b) Utilizzando l'equivalenza tra litri e m^3, ovvero 1 m^3 = 1000 l, si ricava:

$V \approx 0{,}40307\ \text{m}^3 = 403{,}07$ l;

$V' \approx 0{,}03466\ \text{m}^3 = 34{,}66$ l.

Pertanto la capacità complessiva dei due coni è uguale a 403,07 l + 34,66 l = 437,73 l.

c) Osservando la figura 2b il cono C ha angolo di apertura $\alpha = \text{arcsen}\,\dfrac{\overline{AH}}{\overline{OA}} = \text{arcsen}\,\overline{AH}$ (perché $\overline{OA} = 1$).

Nella risoluzione del punto a) del problema si era determinato $\overline{AH} = \dfrac{x}{2\pi}$.

Poiché $x = \sqrt{\dfrac{8}{3}}\,\pi$, risulta $\overline{AH} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Pertanto $\alpha = \text{arcsen}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Se si vuole esprimere l'angolo in gradi sessagesimali, basta utilizzare la calcolatrice scientifica nella modalità DEG e calcolare il valore attraverso il tasto della funzione arcoseno di cui l'apparecchio è comunemente provvisto . Si trova: $\alpha° = 54{,}73561032° \simeq 54°\ 44'\ 8''$.

Un calcolo approssimato dell'angolo α, il cui seno vale $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, può essere compiuto cercando la radice dell'equazione $\text{sen}\,x - \sqrt{\dfrac{2}{3}} = 0$ nell'intervallo $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. La funzione $f(x) = \text{sen}\,x - \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ è continua e strettamente crescente e assume agli estremi dell'intervallo valori di segno opposto. Pertanto la funzione ammette un unico zero. Per determinare tale valore, si utilizza il metodo delle tangenti. Poiché $f''(x) = -\text{sen}\,x$ è sempre negativa nell'intervallo e $f(0) < 0$, si utilizza come ascissa iniziale $x = 0$. Si costruisce la tabella con la formula di ricorrenza delle tangenti compiendo 6 passi.

n	x_n (RAD)	x_n (°)
0	0,00000	0,0000000
1	0,81650	46,7818081
2	0,94463	54,1235068
3	0,95524	54,7310780
4	0,95532	54,7356101
5	0,95532	54,7356103
6	0,95532	54,7356103

Si osserva che il valore trovato, cioè $\alpha° \simeq 54{,}73561°$, ha cifre certe fino alla quinta cifra dopo la virgola.