ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2011

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si può dedurre che il punto $A(0; 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria di Γ.
2. Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.
4. Posto $I(\beta) = \int_0^{\beta} [f(x) - x - \ln 4]dx$, si calcoli: $\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2011

PROBLEMA 1

1. La funzione $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ di grafico Γ ha dominio $\mathbb{R}$. Determiniamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \right) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \right) = -\infty.$$

Calcoliamo $f(x) + f(-x)$:

$$f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} + \left(-x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} \right) = 2\ln 4 + 2\left(\frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x} \right) =$$

$$= 2(\ln 4 + 1).$$

Dal risultato si deduce che:

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \ln 4 + 1 \quad \text{e} \quad \frac{x + (-x)}{2} = 0.$$

Pertanto il punto $(\ln 4 + 1; 0)$ è medio tra i due punti $(x; f(x))$ e $(-x; f(-x))$ appartenenti al grafico Γ, con $x \in \mathbb{R}$.

Segue allora che il punto $A(\ln 4 + 1; 0)$ è centro di simmetria per il grafico Γ per definizione di simmetria centrale di una curva rispetto a un punto. Il punto A è il punto intersezione con l'asse y.

2. Data l'equazione $f(x) = m$, consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - m$, con m reale. La funzione g è continua in $\mathbb{R}$; agli estremi del suo dominio i limiti valgono:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - m \right) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - m \right) = -\infty.$$

Pertanto, fissato m, esisterà un intervallo limitato e chiuso ai cui estremi la funzione assume segno opposto. Allora vale il teorema di esistenza degli zeri: esiste almeno un punto in tale intervallo in cui la funzione $g(x) = f(x) - m$ si annulla e quindi $f(x) = m$.

Inoltre la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ per qualsiasi valore di m e risulta:

$$g'(x) = 1 + 2\left[-\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right] = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}.$$

Se ne deduce che la funzione è strettamente crescente in $\mathbb{R}$; per il primo teorema di unicità dello zero, per tutti i reali m, la funzione $g(x) = f(x) - m$ ammette uno e un solo zero in $\mathbb{R}$ e quindi l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola radice in $\mathbb{R}$.

Se α è la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$, per sostituzione risulta:

$$f(\alpha) = 3.$$

Inoltre, per quanto visto al punto 1 del problema, vale:

$$f(\alpha) + f(-\alpha) = 2(\ln 4 + 1) \qquad \rightarrow \qquad f(-\alpha) = 2(\ln 4 + 1) - f(\alpha) = 2(\ln 4 + 1) - 3 = 2\ln 4 - 1.$$

Si deduce allora che $-\alpha$ è soluzione di $f(x) = m$ quando $m = 2\ln 4 - 1$.

3. Dalla relazione del punto 1, $f(x)+f(-x)=2(\ln 4+1)$, esplicitiamo $f(x)$ e sostituiamo l'espressione corrispondente a $f(-x)$:

$$f(x)=2(\ln 4+1)-f(-x)=$$
$$=2(\ln 4+1)-\left(-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}\right)=2\ln 4+2+x-\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}.$$

Per tutti gli x reali vale allora:

$$f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}.$$

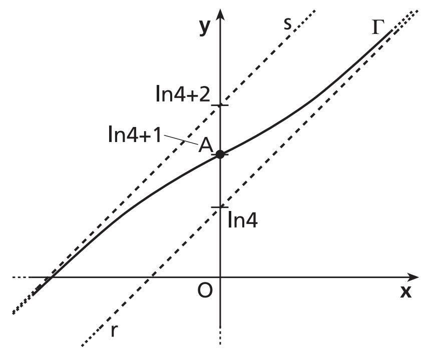
Determiniamo ora gli eventuali asintoti obliqui della funzione f espressa nella forma appena trovata $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$; calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}}{x}=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-1\cdot x)=\ln 4;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}}{x}=1, \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-1\cdot x)=2+\ln 4.$$

La funzione ha asintoto obliquo destro r di equazione $y=x+\ln 4$, asintoto obliquo sinistro s di equazione $y=x+2+\ln 4$.
Rappresentiamo nella figura 2 il grafico Γ della funzione.
Confrontiamo ora l'equazione di f scritta nella forma $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$, con l'equazione della retta r, $y_r=x+\ln 4$, risulta:

$$x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}>x+\ln 4,\ \forall x\in\mathbb{R} \ \rightarrow \ f(x)>y_r.$$



▲ **Figura 2.**

Analogamente raffrontiamo l'equazione di f scritta nella forma $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$, con l'equazione della retta s, $y_s=x+2+\ln 4$, si ricava:

$$x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}<x+2+\ln 4,\ \forall x\in\mathbb{R} \ \rightarrow \ f(x)>y_s.$$

In conclusione il grafico Γ è interamente compreso nella striscia piana delimitata da r e da s.

4. Consideriamo l'integrale $I(\beta)=\displaystyle\int_0^\beta [f(x)-x-\ln 4]dx$, con $\beta>0$, sostituendo l'espressione della funzione $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$:

$$I(\beta)=\int_0^\beta\left[x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}-x-\ln 4\right]dx=\int_0^\beta\frac{2}{e^x+1}\,dx.$$

Calcoliamo il limite dell'integrale:

$$\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta)=\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta\frac{2}{e^x+1}\,dx=$$

poniamo $t = e^x$, da cui $\frac{dt}{t} = dx$:

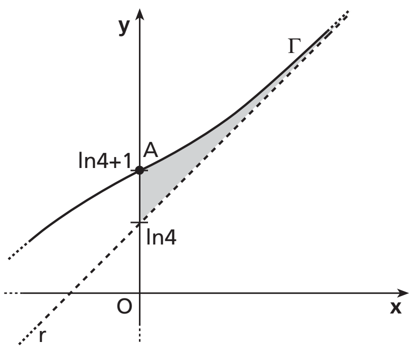
$$= \lim_{\beta\to+\infty} 2\int_0^{e^\beta} \frac{1}{t(t+1)}\,dt =$$

poiché $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$, risulta:

$$= \lim_{\beta\to+\infty} 2\int_1^{e^\beta}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \lim_{\beta\to+\infty} 2[\ln t - \ln(t+1)]_1^{e^\beta} = 2\lim_{\beta\to+\infty}\left[\ln\frac{t}{t+1}\right]_1^{e^\beta} =$$

$$= 2\lim_{\beta\to+\infty} \ln\frac{e^\beta}{e^\beta+1} + 2\ln 2 = 2\ln 2 = \ln 4.$$

Il limite $\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta)$, con $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]dx$, rappresenta l'area della regione di piano compresa tra l'asse y, il grafico Γ e la retta r (figura 3). Tale superficie misura quindi ln 4.



▲ **Figura 3.**