8 Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0.$$

ha una radice compresa fra -1 e 0.

8 Consideriamo la funzione $f(x) = x^{2009} + 2009x + 1$. Cercare le soluzioni reali dell'equazione di partenza equivale a determinare le intersezioni della funzione $f(x)$ con l'asse delle x. La funzione è continua in $\mathbb{R}$ ed esistono almeno due valori di x in cui la funzione cambia di segno:

$$x_1 = -1, \quad f(-1) = (-1)^{2009} - 2009 + 1 = -1 - 2009 + 1 = -2009;$$

$$x_2 = 0, \qquad f(0) = 1.$$

Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto c, interno all'intervallo $[-1; 0]$, in cui la funzione si annulla.
Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = 2009x^{2008} + 2009.$$

Poiché la derivata è sempre positiva nell'intervallo, la funzione $f(x)$ è strettamente crescente; pertanto esiste una sola radice dell'equazione di partenza, compresa tra -1 e 0.