ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

8 Dopo aver spiegato, attraverso una dimostrazione o una interpretazione geometrica, perché l'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ ammette una e una sola soluzione reale, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolarne un valore approssimato.

8 Posto $f(x) = x^3 + x + 1$, la funzione ha campo di esistenza reale. I limiti agli estremi valgono: $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$, ed essendo la funzione continua, essa assume sia valori positivi che negativi. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste allora almeno uno zero. Se, per assurdo, si assume che ci sono due zeri, deve valere $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Allora per il teorema di Rolle esiste almeno un punto $c \in]x_1; x_2[$ tale che $f'(c) = 0$.
La derivata prima è $f'(x) = 3x^2 + 1$ ed è sempre positiva. Si è così raggiunto un assurdo, quindi la funzione ha un solo zero. Pertanto, l'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ ha una sola radice reale.

Poniamo $f(x) = 0$, cioè:

$$x^3 + x + 1 = 0$$

$$x^3 = -x - 1$$

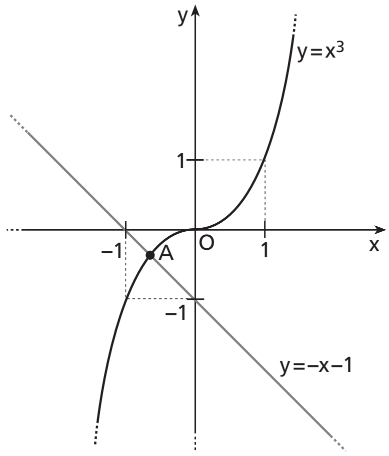
Se chiamiamo y ognuno dei due membri, otteniamo:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -x - 1 \end{cases}.$$

Rappresentiamo le due funzioni e troviamo graficamente il punto A comune (figura 9).
Il punto A ha ascissa x_A compresa fra -1 e 0.
Si determina il suo valore approssimato attraverso il metodo delle secanti. Poiché $f(-1) = -1$ e $f(-0{,}5) = 0{,}375$, si localizza la radice nell'intervallo $[a_0; b_0] = [-1; -0{,}5]$. In tale intervallo la derivata seconda $f'' = 6x$ ha segno negativo e, poiché $f(a_0)\, f''(x) = -f''(x) > 0$, si utilizza la formula di ricorrenza:

$$x_0 = b_0,$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a_0 - x_n}{f(a_0) - f(x_n)} \cdot f(x_n).$$



▲ **Figura 9.**

Nel caso specifico risulta:

$$x_0 = -0{,}5,$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-1 - x_n}{-1 - x_n^3 - x_n - 1} \cdot (x_n^3 + x_n + 1) = \frac{-x_n^3 - 1}{x_n^3 + x_n + 2}.$$

Si esegue l'iterazione fino a $n = 6$ mettendo i risultati nella seguente tabella.

n	x_n
0	$-0{,}5$
1	$-0{,}636364$
2	$-0{,}671196$
3	$-0{,}679662$
4	$-0{,}681691$
5	$-0{,}682176$
6	$-0{,}682292$

Il valore approssimato della radice dell'equazione è $-0{,}682292$.

