**4** Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$. Come si può essere certi che esiste un unico zero?

**4** La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$ è continua in $\mathbb{R}$.
Per accertarsi dell'esistenza di un unico zero, calcoliamo la derivata prima $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 3x^2 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2.$$

La derivata $f'(x)$ è positiva per ogni $x \neq 0$ e perciò $f(x)$ è monotòna crescente; in tali condizioni, il primo teorema di unicità dello zero assicura l'esistenza di un unico zero in un intervallo $[a; b]$ limitato e chiuso, se $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Calcoliamo $f(x)$ per alcuni valori:

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1.$$

Quindi esiste un unico zero di $f(x)$ nell'intervallo $]0; 1[$; calcoliamo un suo valore approssimato con la precisione di due cifre decimali applicando il metodo di bisezione e partendo dai valori $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$.

| $a$ | $f(a)$ | $b$ | $f(b)$ | $\frac{a+b}{2}$ | $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | − 1 | 1 | 1 | 0,5 | − 0,081 |
| 0,5 | − 0,081 | 1 | 1 | 0,75 | 0,33 |
| 0,5 | − 0,081 | 0,75 | 0,33 | 0,625 | 0,099 |
| 0,5 | − 0,081 | 0,625 | 0,099 | 0,5625 | 0,003 |

Lo zero approssimato a due cifre decimali della funzione è 0,56 con un errore minore di 0,003.