

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008**

■ **PROBLEMA 2**

Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.

1. Si traccino i grafici di f e g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione $b(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di b .
4. Si calcoli l'area racchiusa dal grafico di b e dall'asse x sull'intervallo $[2; 4]$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = 2^x$ è la funzione esponenziale di base 2, mentre $g(x) = x^2$ è una parabola con asse verticale, vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto. Tracciamo i corrispondenti grafici e indichiamo con A , B , C i punti di intersezione delle due curve (figura 6).

2. Nella figura 6 osserviamo che il punto A ha ascissa negativa ed è uno zero della funzione $b(x) = 2^x - x^2$. Tale funzione è definita, continua e derivabile infinite volte in \mathbb{R} . Inoltre risulta

$$b(0) = 1 > 0, \quad b(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0,$$

pertanto $-1 < x_A < 0$.

La derivata prima e seconda hanno forma:

$$b'(x) = (\ln 2) \cdot 2^x - 2x,$$

$$b''(x) = (\ln^2 2) \cdot 2^x - 2.$$

La derivata seconda è crescente nell'intervallo $[-1; 0]$, inoltre:

$$b''(-1) = \frac{\ln^2 2}{2} - 2 < 0, \quad b''(0) = \ln^2 2 - 2 < 0.$$

In tale intervallo la derivata seconda mantiene costante e negativo il suo segno, concorde con $b(-1)$.

Applichiamo il metodo delle tangenti nell'intervallo $[-1; 0]$ per determinare x_A , utilizzando la formula di ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b(x_n)}{b'(x_n)}.$$

I primi quattro termini di tale successione sono:

$$x_0 = -1,$$

$$x_1 = x_0 - \frac{b(x_0)}{b'(x_0)} = -1 + \frac{1}{\ln 2 + 4} \simeq -0,7869,$$

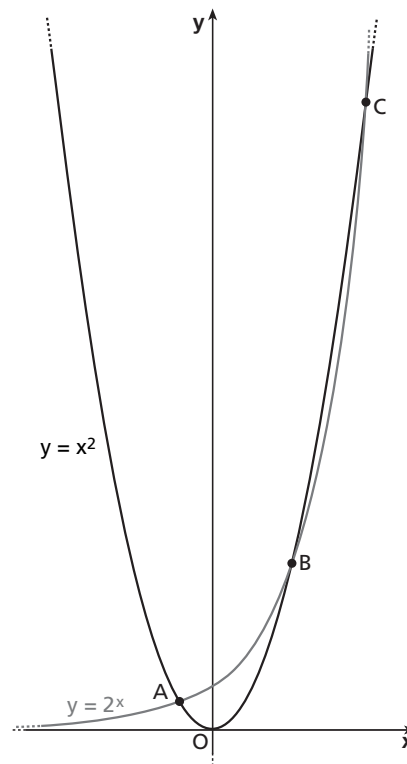
$$x_2 = x_1 - \frac{b(x_1)}{b'(x_1)} \simeq -0,7668,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{b(x_2)}{b'(x_2)} \simeq -0,7666.$$

Poiché $|x_3 - x_2| = 0,0002 < 0,01$, il valore approssimato di x_A con due cifre decimali esatte è:

$$x_A \simeq 0,76.$$

3. Come già osservato nel punto 2 la funzione $b(x) = 2^x - x^2$ è definita, continua e derivabile infinite volte



▲ Figura 6.

in \mathbb{R} . Inoltre risulta $b'(x) = (\ln 2) \cdot 2^x - 2x$ e $b''(x) = (\ln^2 2) \cdot 2^x - 2$.

Dal grafico di figura 6 si deduce che, essendo tre i punti di intersezione tra le curve $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$, gli zeri della funzione differenza $b(x) = 2^x - x^2$ sono pertanto tre, di ascissa x_A , x_B e x_C . Ovvero:

$x_A \approx 0,76$, per il punto 2;

$$b(0) = 1 > 0, \quad b(3) = 8 - 9 = -1 < 0, \quad b(2) = 4 - 4 = 0 \rightarrow x_B = 2;$$

$$b(3) = -1 < 0, \quad b(5) = 32 - 25 = 7 > 0 \quad b(4) = 16 - 16 = 0 \rightarrow x_C = 4.$$

L'unicità e l'esistenza degli zeri della funzione b può essere confermata alla luce del calcolo della derivata prima e seconda e del loro segno.

Studiamo la derivata prima $b'(x) = (\ln 2) \cdot 2^x - 2x$ e il suo segno. Benché non sia possibile stabilire con esattezza gli zeri di questa funzione, osserviamo che i punti in cui tale derivata si annulla sono quelli

che verificano l'equazione $2^x = \frac{2x}{\ln 2}$, ossia le ascisse dei punti di intersezione delle due curve $y = 2^x$ e

$y = \frac{2x}{\ln 2}$ che mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = \frac{2}{\ln 2} x \end{cases}$$

Essendo $y = 2^x$ una funzione convessa, le intersezioni di questa esponenziale con la retta $y = \frac{2x}{\ln 2}$ possono essere al più 2 (figura 7).

Poiché $b'(0) = \ln 2 \cdot 1 = \ln 2 > 0$, $b'(1) = 2(\ln 2 - 1) < 0$, mentre $b'(4) = 8(2 \ln 2 - 1) > 0$, concludiamo che gli unici zeri di $b'(x)$ sono $x_0 \in]0; 1[$ e $x_1 \in]1; 4[$.

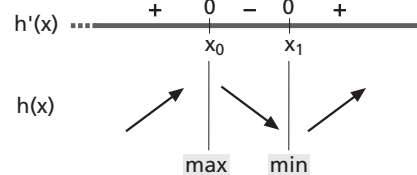
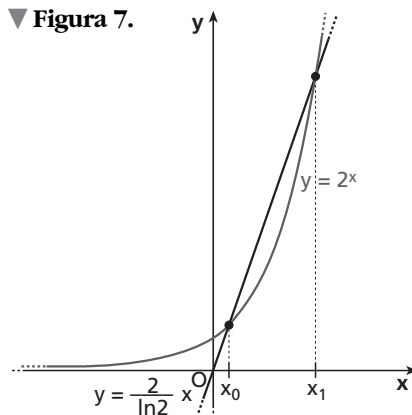
In figura 8 è rappresentato il quadro dei segni della derivata prima $b'(x)$.

La derivata seconda $b''(x) = (\ln^2 2) \cdot 2^x - 2$ si annulla per:

$$(\ln^2 2) \cdot 2^x = 2 \rightarrow 2^x = \frac{2}{\ln^2 2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{\ln \frac{2}{\ln^2 2}}{\ln 2} = 1 - 2 \frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2} = \bar{x} \approx 2,5.$$

▼ Figura 7.



▲ Figura 8.

Pertanto la funzione b ha concavità rivolta verso il basso per $x < \bar{x}$, concavità verso l'alto per $x > \bar{x}$.

Suddividiamo il dominio di b in 5 intervalli:

- in $] -\infty; -1[$, $b' > 0$ e quindi b è crescente; poiché $b(-1) < 0$ segue che $b(x) < 0$ per $x < -1$;
- analogamente si verifica che $b' > 0$ in $]5; +\infty[$ ed essendo $b(5) > 0$ segue che $b(x) > 0$ per $x \geq 5$;
- in $]-1; 0[$ la funzione b ha un solo zero, per il primo teorema di unicità dello zero, infatti $b(-1) \cdot b(0) < 0$ e $b'(x) \neq 0$ per $-1 < x < 0$; si osservi che tale zero è l'ascissa del punto A ;
- in $[0; \bar{x}]$ la funzione b ha un solo zero per il secondo teorema di unicità dello zero; per lo stesso teorema, ha un solo zero in $[\bar{x}; 5]$, essendo $b(\bar{x}) \cdot b(5) < 0$ e $b''(x) > 0$ per $\bar{x} < x < 5$.

Pertanto le uniche intersezioni con gli assi cartesiani della funzione b sono:

$$(x_A; 0), \quad (2; 0), \quad (4; 0), \quad (0; 1).$$

Il quadro del segno di b è:

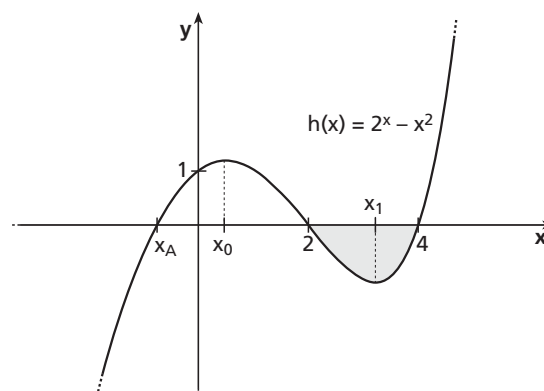
$$b(x) > 0 \text{ per } x_A < x < 2 \text{ e } x > 4;$$

$$b(x) < 0 \text{ per } 2 < x < 4.$$

In figura 9 è riportato il grafico della funzione b .

4. L'area della regione racchiusa tra il grafico di b e l'asse x sull'intervallo $[2; 4]$, evidenziata in figura 9, è:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_2^4 -(2^x - x^2) dx = \left[-\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \\ &= \frac{56}{3} - \frac{12}{\ln 2}. \end{aligned}$$



▲ Figura 9.